Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Andrea Nardi

Tutorato 8 - 10 Dicembre 2013

1. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $\begin{cases} y'(x) = y(x)\sin(x) + \sin(2x) \\ y(0) = -2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'(x) = \frac{xy(x)}{(x-1)^2} \\ y(2) = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x \\ y'(0) = 2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y''''(x) + y'''(x) - 2y''(x) - 3y'(x) - 3y(x) = x^2 \\ y'''(0) = 0 \\ y''(0) = 3 \\ y'(0) = \frac{2}{3} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = \cos(2x) \\ y'(\pi) = \frac{1}{4} \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} y'''''(x) - 4y''''(x) + 5y'''(x) - 4y''(x) + 4y'(x) = \cos(x) \\ y''''(0) = -\frac{56}{25} \\ y'''(0) = -\frac{23}{50} \\ y''(0) = 0 \\ y'(0) = -\frac{3}{50} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 4\sin(2x) \\ y'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{6}{5} \\ y(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{5} \end{cases}$ (h) $\begin{cases} y'''(x) + y''(x) - 2y'(x) = e^x + xe^{-2x} + x^2 \\ y''(0) = \frac{124}{9} \\ y'(0) = -\frac{77}{18} \\ y(0) = 6 \end{cases}$

2. Calcolare $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$. Sfruttare il risultato ottenuto per mostrare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{3}{5}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}\right) .$$

3. Sia $F = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : 0 \leq f(x) \leq 1\}$, e sia $\Phi : F \longrightarrow \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ la mappa definita da:

$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x tf(t)\, dt .$$

Mostrare che $\Phi(F) \subseteq F$ e che Φ é una contrazione in $(F, ||\cdot||_\infty)$.

4. Provare che la mappa $\Psi : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1])$ definita da

$$\Psi(f)(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{f(t)}{1+t^2}\right) dt \qquad \text{é una contrazione in } (\mathcal{C}([0,1]), ||\cdot||_\infty) .$$

5. Sia $\phi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si consideri la funzione

$$F_\phi(x) = \int_0^1 \frac{\sin(\phi(x)t^2)}{t} dt \ .$$

   (a) Supponendo $\phi \in \mathcal{C}^1$, trovare un'espressione di F'_ϕ in cui non compaiono integrali;

   (b) Trovare tutte le $\phi \in \mathcal{C}^1((a,b))$ tali che $F'_\phi(x) = \sin(\phi(x))$.

6. Calcolare :

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\log(x)}\ dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)}\ dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)} dx$